الدرس 11

الأعداد المركبة (قسم ثانٍ)

1 - الأعداد المركبة وحساب المثلثات

من أجل كل عدد حقيقي θ، ومن أجل كل عدد صحيح n لدينا $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

أي $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

مبرهنة

من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا:

1) $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos a + \sin b\cos a$

2) $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$

الإثبات

1) لدينا $e^{i(a+b)} = e^{ia}\times e^{ib}$

أي $\sin(a+b) + i\sin(a+b) = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$

بعد تفكيك الطرف الثاني من المساواة وتبسيطه فإنه يكتب على الشكل التالي:

$(\cos a\cos b - \sin a\sin b) + i(\sin a\cos b + \sin b\cos a)$

إذن بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases}\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b\\ \sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a\end{cases}$$

2) لدينا $e^{i(a-b)} = e^{ia}\times e^{-ib}$

أي $\cos(a-b) + i\sin(a-b) = (\cos a + i\sin a)(\cos(-b) + i\sin(-b))$

بعد تفكيك وتبسيط الطرف الثاني فإنه يكتب بالصيغة الآتية:

$(\cos a\cos b + \sin a\sin b) + i(\sin a\cos b - \sin b\cos a)$ وبالمطابقة نجد:

$$\begin{cases}\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b\\ \sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a\end{cases}$$

نتائج

1) $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

2) $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

3) $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

4) $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

5) $\cos 2p = \cos^2 p - \sin^2 p$, $\sin 2p = 2\sin p\cos p$

تمرين تدريبي

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\cos 3x - \cos 5x = \sin 6x + \sin 2x$ ....(1)

2) بين أن المثلث ABC متقايس الساقين رأسه A إذا وفقط إذا كان:

$2\sin\hat{B}\cos\hat{C} = \sin\hat{A}$

✓ الحل

1) $\cos 3x - \cos 5x = -2\sin(4x)\sin(-x) = 2\sin 4x\sin x$

$\sin 6x + \sin 2x = 2\sin(4x)\cos x$

إذن المعادلة (1) تكتب على الشكل $2\sin 4x\sin x = 2\sin(4x)\cos x$

بالقسمة على 2 نجد $\sin 4x\sin x = \sin 4x\cos x$

ومنه ينتج $(\sin 4x)(\sin x - \cos x) = 0$

وهذا يعني $\sin 4x = 0$ أو $\sin x = \cos x$

$\sin 4x = 0$ يكافئ $4x = k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ يكافئ $x = \frac{k\pi}{4}$

$\sin x = \cos x$ يكافئ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة (1) هي الأعداد الحقيقية من الشكل:

$\frac{k\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4} + k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

2) - نفرض ان ABC متقايس الساقين يعني ان $\hat{B}=\hat{C}$

لدينا $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi$ ومنه $\hat{A}=\pi-(\hat{B}+\hat{C})$

$$\sin\hat{A} = \sin\left(\pi-(\hat{B}+\hat{C})\right) = \sin(\hat{B}+\hat{C})$$

$$= \sin\hat{B}\cos\hat{C} + \sin\hat{B}\cos\hat{C} = 2\sin\hat{B}\cos\hat{C}$$

- عكسيا نفرض ان $\sin\hat{A} = 2\sin\hat{B}\cos\hat{C}$ .... (*)

ونبين ان $\hat{C}=\hat{B}$

$$\sin\hat{A} = \sin\left(\pi-(\hat{B}+\hat{C})\right) = \sin(\hat{B}+\hat{C}) = \sin\hat{B}\cos\hat{C} + \sin\hat{C}\cos\hat{B}$$

إذن المساواة (*) تكتب $2\sin\hat{B}\cos\hat{C} = \sin\hat{B}\cos\hat{C} + \sin\hat{C}\cos\hat{B}$

بالتبسيط نجد $\sin\hat{B}\cos\hat{C} = \sin\hat{C}\cos\hat{B}$

اي $\sin\hat{B}\cos\hat{C} - \sin\hat{C}\cos\hat{B} = 0$ اي $\sin(\hat{B}-\hat{C}) = 0$

ومنه نجد $\hat{B}-\hat{C}=0$ اي $\hat{B}=\hat{C}$

2 - الأعداد المركبة والأشكال الهندسية

استعمال الأعداد المركبة لمعالجة مشكل في الهندسة يضطرنا للعمل في معلم متعامد ومتجانس مباشر وذلك لحساب الطويلة والعمدة.

2 - 1 الدائرة

تعريف

r عدد حقيقي موجب تماما و ω نقطة ثابتة من المستوي لاحقتها Z_0.

مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z

بحيث $|Z-Z_0| = r$ هي الدائرة التي مركزها ω ونصف قطرها r.

خاصية

المعادلة الوسيطية للدائرة التي مركزها ω ذات اللاحقة Z_0 ونصف قطرها r هي:

$$Z=Z_0+re^{i\theta}$$

او $\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases}$ حيث θ يمسح $\mathbb{R}$ و r عدد حقيقي موجب ثابت.

الإثبات

ليكن θ قيسا للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{\omega M})$ حيث M نقطة كيفية من الدائرة (C)

M نقطة من (C) إذا وفقط إذا كانت إحداثيات $\overrightarrow{\omega M}$ هي $(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)$.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{\omega M}$ هي $r\cos\theta+ir\sin\theta=re^{i\theta}$

لكن $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\omega}+\overrightarrow{\omega M}$ ومنه ينتج $Z=Z_0+re^{i\theta}$

مثال - ♦

الدائرة التي مركزها $\omega(1,2)$ ونصف قطرها 2 معادلتها الوسيطية هي: $Z=1+2i+2e^{i\theta}$ حيث θ تمسح $\mathbb{R}$.

2 - 2 نصف المستقيم - المستقيم

- ليكن θ عدد حقيقي ثابت و Z_0 عدد مركب صورته النقطة الثابتة A_0.

مجموعة النقط M ذات اللاحقة z مع $Z\neq Z_0$

بحيث $arg(Z-Z_0)=\theta$ هو نصف المستقيم المفتوح

الذي مبدؤه A_0 والموجه بالشعاع $\vec{w}$

بحيث $(\vec{u},\vec{w})=\theta$ ونرمز له ب $]A_0t)$

خاصية

المعادلة الوسيطية لنصف المستقيم الذي مبدؤه A_0 ذات اللاحقة Z_0 وشعاع توجيهه $\vec{w}$ حيث: $(\vec{u},\vec{w})=\theta$ هي $Z=Z_0+re^{i\theta}$ مع r يمسح $[0,+\infty[$ و θ عدد حقيقي ثابت.

الإثبات

لتكن M نقطة كيفية من نصف المستقيم (Δ) الذي مبدؤه A_0 وشعاع توجيهه $\vec{w}$

إذن $\overrightarrow{A_0M}=k\vec{w}$ مع $k\geq 0$

المساواة $\overrightarrow{A_0M}=k\vec{w}$ تكتب $Z-Z_0=k\times k_1e^{i\theta}$

حيث $\|Z_{\vec{w}}\|=k_1$ و $\theta=arg(Z_{\vec{w}})$

بوضع $kk_1=r$ نجد $Z-Z_0=re^{i\theta}$ وهو المطلوب.

محور قطعة مستقيمة

A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب a و b مع $a\neq b$.

مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z

بحيث $|Z-a|=|Z-b|$

هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

لأن $|Z-a|=|Z-b|$ تعني ان $AM=BM$

تمرين تدريبي 1

M نقطة لاحقتها $Z = e^{i\theta}$ مع θ عدد حقيقي كيفي.
نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة $Z \neq 0$ النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث :

$$Z' = \frac{1+i}{Z} - 2i$$

1- ما هي E مجموعة النقط M لما θ تمسح $\mathbb{R}$ ؟
2- عبر عن Z' بدلالة θ واستنتج طبيعة F مجموعة النقط M'، ثم ارسم E و F .

✔ الحل :

1 $Z = Z_0 + 1 \times e^{i\theta}$ حيث $Z_0 = 0$
بما أن θ تمسح $\mathbb{R}$ فإن M تمسح دائرة مركزها O ونصف قطرها $r = 1$.

2) أ) لدينا $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن :

$$Z' = \frac{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\theta}} - 2i = -2i + \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}$$

ب) مجموعة النقط M' لما θ تمسح $\mathbb{R}$ هي دائرة مركزها A ذات اللاحقة $-2i$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$

تمرين تدريبي 2

1) عبر بدلالة العمدة عن مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z لكل من نصفي المستقيمين المفتوحين (d_1) و (d_2) الموضحين في الشكل المجاور.



2) في كل حالة من الحالات التالية مثل مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق الشرط المعطى :
أ) $arg(Z+i) = \frac{\pi}{3}$.
ب) $arg(Z-i) = \pi$

✔ الحل

1) نصف المستقيم (d_1) مبدؤه A ذات اللاحقة $a = 2 - i$

M نقطة من (d_1) ذات اللاحقة Z يعني $\left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{2}$ أي $arg(Z-a) = \frac{\pi}{2}$

- نصف المستقيم (d_2) مبدؤه النقطة B ذات اللاحقة $b = -1 - i$

M نقطة من (d_2) ذات اللاحقة Z يعني $\left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{BM}\right) = \frac{3\pi}{4}$ أي $arg(Z-b) = \frac{3\pi}{4}$

2) أ) لدينا $arg(Z+i) = arg(Z-(-i))$
لتكن A نقطة ذات اللاحقة $-i$ و M نقطة ذات اللاحقة Z
إذن $arg(Z+i) = \frac{\pi}{3}$ يكافئ $\left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{3}$
ومنه مجموعة النقط M هي نصف المستقيم المفتوح (Δ_1) الذي مبدؤه A .

ب) لتكن B نقطة ذات اللاحقة i و M نقطة ذات اللاحقة Z .
$arg(Z-i) = \pi$ يكافئ $\left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{BM}\right) = \pi$
ومنه مجموعة النقط هي نصف المستقيم (Δ_2) المفتوح ومبدؤه B .

3 - الأعداد المركبة و التحويلات النقطية

مثال -

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{C}$ بـ $f(z) = iz$ و $g(z) = \frac{1}{2}z$

1) احسب $f(1)$ و $(gof)(1)$ ، $fog\,of(1)$ ، $gof\,og\,of(1)$
وعلم النقط الموافقة لهذه القيم في المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

2) نعتبر M النقطة ذات اللاحقة z و N ، P ، Q ، R النقط ذات اللواحق : $f(z)$ ، $gof(z)$ ، $fog\,of(z)$ ، $gof\,og\,of(z)$ على الترتيب.
أ) عين بدلالة z لواحق كل من هذه النقط.
ب) باستعمال النقط O ، M ، N فسر هندسيا المساواة $f(z) = iz$ مستنتجا طبيعة التحويل r من المستوي بحيث $r(M) = N$ ، $r(P) = Q$.
جـ) ما هو التحويل H من المستوي بحيث $H(N) = P$ و $H(Q) = R$

3) نضع $z = a + ib$ مع a و b عددين حقيقيين.
عين إحداثيات النقط M ، N ، P ، Q ، R بدلالة a و b .

✔ الحل

1) $f(1) = i$ ، $(gof)(1) = g(f(1)) = g(i) = \frac{1}{2}i$

$$(fog\,of)(1) = fog\left(f(1)\right) = (fog)(i) = f\left(g(i)\right) = f\left(\frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{2}$$

$$gof\,og\,of(1) = gof\,og(i) = gof\left(\frac{1}{2}i\right) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

نسمي A ، B ، C ، D لواحق $f(1)$ ، $(gof)(1)$

و $fog\,of(1)$ و $gof\,og\,of(1)$ على الترتيب .

2) 1) M لاحقتها z

N لاحقتها $f(z)$ اي iz

P لاحقتها $gof(z)$

حيث $gof(z) = g\left(f(z)\right) = g(iz) = \frac{1}{2}iz$

Q لاحقتها $fog\,of(z)$ حيث $fog\,of(z) = fog(iz) = f\left(\frac{1}{2}iz\right) = -\frac{1}{2}z$

R لاحقتها $gof\,og\,of(z)$ حيث $gof\,og\,of(z) = g\left(-\frac{1}{2}z\right) = -\frac{1}{4}z$

لدينا $f(z) = iz$

إذا كان $z \neq 0$ فانه ينتج $\frac{f(z)}{z} = i$ اي $\frac{ON}{OM} = 1$ و $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = \frac{\pi}{2}$

وهذا يعني ان N هي صورة M بدوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

- بما ان $Z_Q = iZ_P$ فإن Q هي صورة P بدوران مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

إذن التحويل r هو دوران مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

جـ) $Z_N = iz$ و $Z_P = \frac{1}{2}iz$ اي $Z_P = \frac{1}{2}Z_N$

$Z_Q = -\frac{1}{2}z$ و $Z_R = -\frac{1}{4}z$ اي $Z_R = \frac{1}{2}Z_Q$

إذن التحويل الذي يحول N إلى P و Q إلى R هو تحاكي نسبته $\frac{1}{2}$ ومركزه النقطة O .

3) $M(a,b)$ ، $N(-b,a)$ ، $P\left(-\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}a\right)$ ، $Q\left(-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}b\right)$ ، $R\left(-\frac{1}{4}a, -\frac{1}{4}b\right)$.

3 - 1 الكتابة المركبة لتحويل نقطي

ليكن F تحويل نقطي من المستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' بحيث $F(M) = M'$

التطبيق f من $\mathbb{C}$ الذي يرفق بكل عدد مركب Z العدد المركب Z' حيث $f(Z) = Z'$ يسمى الدالة المركبة المرفقة للتحويل F .

$P \to P$	$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$F : M(Z) \mapsto M'(Z')$	$f : Z \mapsto Z'$

3 - 2 الكتابة المركبة للانسحاب

مبرهنة

الكتابة المركبة المرفقة للانسحاب t الذي شعاعه $\vec{w}$ هي $Z' = Z + b$ حيث b لاحقة $\vec{w}$.

الإثبات

من أجل كل نقطة $M(Z)$ النقطة M' صورة M بـ t يعني $t(M) = M'$ و $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$

اي $Z' - Z = b$ ومنه نجد $Z' = Z + b$

خاصية

M' و N' صورتي M و N على الترتيب بالانسحاب $t_{\vec{w}}$ يكافئ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$

الإثبات

$t_{\vec{w}}(N) = N'$ يعني $Z_{N'} = Z_N + b$ .... (1)

$t_{\vec{w}}(M) = M'$ يعني $Z_{M'} = Z_M + b$ .... (2)

حيث $\vec{w}$ صورة العدد المركب b

بطرح (1) من (2) نجد $Z_{M'} - Z_{N'} = Z_M - Z_N$

وهذا يعني أن $\overrightarrow{N'M'} = \overrightarrow{NM}$

مثال - ♦

الكتابة المركبة للانسحاب الذي شعاعه $\vec{w}\binom{1}{2}$ هي $Z' = Z + 1 + 2i$

تمرين تدريبي

$\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ معلم متعامد ومتجانس مباشر للمستوي.

A ، B نقطتان لاحقتاهما $1+2i$ ، $3+5i$ على الترتيب.

عين الانسحاب الذي يحول A إلى B .

✓ **الحل :**

$Z_B = Z_A + b$ ومنه $b = Z_B - Z_A = 2 + 3i$

ومنه فإن الكتابة المركبة للانسحاب المطلوب هي $Z' = Z + 2 + 3i$

3 - 3 الكتابة المركبة للتحاكي

مبرهنة

k عدد حقيقي غير معدوم.

الكتابة المركبة المرفقة للتحاكي الذي مركزه النقطة O ونسبته k هي $Z'=kZ$

الكتابة المركبة المرفقة للتحاكي الذي مركزه Ω ذات اللاحقة Z_0 هي $Z'-Z_0=k(Z-Z_0)$

الإثبات

ليكن h تحاكي مركزه النقطة Ω ونسبته k

$h(M)=M'$ يكافئ $\overrightarrow{\Omega M'}=k\,\overrightarrow{\Omega M}$

اي $Z'-Z_0=k(Z-Z_0)$

خاصية

إذا كانت M' و N' صورتي M و N على التوالي بالتحاكي الذي نسبته k فإن ؛

$\overrightarrow{M'N'}=k\,\overrightarrow{MN}$ و $M'N'=|k|\,MN$.

الإثبات

النقط M ، N ، M' ، N' لواحقها على التوالي Z_1 ، Z_2 ، Z'_1 ، Z'_2.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{MN}$ هي Z_2-Z_1 ولاحقة الشعاع $\overrightarrow{M'N'}$ هي $Z'_2-Z'_1$

ليكن k نسبة التحاكي و Ω مركزه حيث Ω ذات اللاحقة Z_0.

لدينا $Z'_1-Z_0=k(Z_1-Z_0)$ و $Z'_2-Z_0=k(Z_2-Z_0)$

بالطرح نجد $Z'_2-Z'_1=k(Z_2-Z_1)$

اي $\overrightarrow{M'N'}=k\,\overrightarrow{MN}$

ملاحظة

التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته -1 هو التناظر المركزي الذي مركزه Ω.

تمرين تدريبي

t انسحاب شعاعه $\vec{w}(1+i)$ و h تحاكي مركزه $\Omega(1-i)$ ونسبته -2

1) عين الكتابة المركبة المرفقة لـ t و h.

2) عين الكتابة المركبة المرفقة لـ $F=hot$ ثم عين طبيعة F.

الحل

1) الكتابة المركبة المرفقة لـ t هي $Z'=Z+1+i$

الكتابة المركبة المرفقة لـ h هي $Z'-(1-i)=-2(Z-(1-i))$

اي $Z'-1+i=-2(Z-1+i)$

2) $t(M)=M'$ و $h(M')=M''$ ومنه $F(M)=M''$

لدينا $Z'=Z+1+i$ و $Z''-1+i=-2(Z'-1+i)$

إذن $Z''-1+i=-2\left[Z+1+i-1+i\right]$

$Z''-1+i=-2(Z+2i)$

$Z''=-2Z+1-5i$ .... (1)

لاحظ أنه يمكن كتابة (1) على الشكل ؛

$$Z''-\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}i\right)=-2\left(Z-\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}i\right)\right)$$

إذن hot هو أيضا تحاكي مركزه النقطة $B\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}i\right)$ ونسبته -2

(مركز التحاكي هي النقطة الصامدة M حيث $F(M)=M$ أي $Z'=Z$)

3 - 4 الكتابة المركبة للدوران

مبرهنة

Ω نقطة ذات اللاحقة Z_0 و θ عدد حقيقي.

- الكتابة المركبة المرفقة للدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته θ هي $Z'=e^{i\theta}Z$
- الكتابة المركبة المرفقة للدوران r الذي مركزه النقطة Ω وزاويته θ هي ؛

$Z'-Z_0=e^{i\theta}(Z-Z_0)$

الإثبات

r دوران مركزه النقطة Ω وزاويته θ و M نقطة من المستوي تختلف عن Ω و M' صورة M بهذا الدوران.

$r(M)=M'$ تكافئ $(M=M')$ او $(\Omega M=\Omega M'$ و $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})=\theta+2k\pi)$

- من اجل M تختلف عن Ω لدينا ؛

$$\left|\frac{Z'-Z_0}{Z-Z_0}\right|=1 \quad \text{و} \quad arg\left(\frac{Z'-Z_0}{Z-Z_0}\right)=\theta+2k\pi$$

وهذا يعني أن $\frac{Z'-Z_0}{Z-Z_0}=e^{i\theta}$

اي $Z'-Z_0=e^{i\theta}(Z-Z_0)$ .... (*)

- من اجل M منطبقة على Ω العلاقة (*) تبقى صحيحة.

حالة خاصة

a ، b ، c لواحق النقط A ، B ، C على الترتيب.

- ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين.

- إذا كان اتجاه ABC مباشرا اي $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$

فإن الدوران $r\left(A,\frac{\pi}{2}\right)$ الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول النقطة B إلى C

إذن $Z_C - Z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_B - Z_A)$

وهذه العلاقة تكتب $c - a = i(b - a)$

- إذا كان اتجاه ABC غير مباشر اي $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$

فإن الدوران $r\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)$ يحول النقطة B إلى C وبنفس الكيفية السابقة نجد :

$Z_C - Z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z_B - Z_A)$ اي $c - a = -i(b - a)$

• ABC مثلث متقايس الأضلاع

- إذا كان اتجاه ABC مباشرا اي $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$

فإن الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ يحول B إلى C

إذن $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$

- إذا كان اتجاه ABC غير مباشر اي $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{3}$

فإن الدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ يحول B إلى C

إذن $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$

خاصية

- إذا كانت النقطتان M' و N' صورتي النقطتين المختلفتين M و N على الترتيب بالدوران الذي زاويته θ فإن $MN = M'N'$ و $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}\right) = \theta + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

الإثبات

ليكن Z_0 لاحقة مركز الدوران.

$MN = |Z_N - Z_M|$ و $M'N' = |Z_{N'} - Z_{M'}|$

لكن $Z_{N'} - Z_0 = e^{i\theta}(Z_N - Z_0)$ و $Z_{M'} - Z_0 = e^{i\theta}(Z_M - Z_0)$

بطرح طرفي هاتين المساواتين نجد :

$Z_{N'} - Z_{M'} = e^{i\theta}(Z_N - Z_M)$ ومن هذه المساواة ينتج :

$|Z_{N'} - Z_{M'}| = |Z_N - Z_M|$ و $arg(Z_{N'} - Z_{M'}) = \theta + arg(Z_N - Z_M) + 2k\pi$

اي $M'N' = MN$ و $\left(\vec{u}, \overrightarrow{M'N'}\right) = \theta + \left(\vec{u}, \overrightarrow{MN}\right) + 2k\pi$

وهذه الأخيرة تكتب :

$M'N' = MN$ و $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}\right) = \theta + 2k\pi$

خلاصة

F تحويل نقطي من المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث :

$Z' = aZ + b$ مع a و b عددان مركبان و $a \neq 0$

- إذا كان $a = 1$ فإن F انسحاب شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة b
- إذا كان $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ فإن F تحاكي نسبته a ومركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $Z_0 = \frac{b}{1-a}$
- إذا كان a عددا مركبا وليس حقيقيا و $|a| = 1$ فإن F دوران زاويته $arg(a)$

ومركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $Z_0 = \frac{b}{1-a}$

تمرين تدريبي 1

r دوران مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $3i$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ و r' دوران مركزه النقطة O مبدأ المعلم وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

1) عين الكتابة المركبة لـ $r' o r$

2) استنتج طبيعة التحويل $r' o r$.

الحل :

1) $M(Z) \xrightarrow{r} M'(Z') \xrightarrow{r'} M''(Z'')$ ، $r' o r$

الكتابة المركبة للدوران r هي $Z' - 3i = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z - 3i)$

اي $Z' = iZ + 3i + 3$

الكتابة المركبة للدوران r' هي $Z'' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z'$ اي $Z'' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)Z'$

إذن $Z'' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(iZ + 3i + 3)$

$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)Z + \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\right)$

وهي الكتابة المركبة لـ $r' o r$

2) بما ان $Z'' = aZ + b$ حيث $a = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

و $b = \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\right)$ و $|a| = 1$ فإن $r' o r$ دوران زاويته $arg(a) = 5\frac{\pi}{6}$

ومركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $Z_0 = \frac{b}{1-a}$

تمرين تدريبي 2

في المستوي الموجه نعتبر المثلثين ABC و ADE القائمين في A ومتساويي الساقين

بحيث $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right) = \frac{\pi}{2}$

بين أن $BD = CE$ وأن المستقيمين (BD) و (CE) متعامدان.

1) باستعمال طرق هندسية.

2) باستعمال الأعداد المركبة.

✓ الحل :

1) بالدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$، صورة النقطة B هي C، و صورة النقطة D هي E ومنه :

$\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CE}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ و $BD = CE$

و (CE) صورة (BD) بالدوران r.

المساواة $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CE}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

تعني أن المستقيمين (BD) و (CE) متعامدان.

2) نرمز بـ b ، c ، d ، e إلى لواحق النقط B ، C ، D ، E في معلم متعامد ومتجانس مباشر مركزه النقطة A .

$r(D) = E$ و $r(B) = C$

إذن $c = ib$ و $e = id$ بالطرح نجد :

$e - c = i(d-b)$ وبالقسمة على $d-b$ نجد $\frac{e-c}{d-b} = i$

بما أن $\left|\frac{e-c}{d-b}\right| = 1$ و $arg\left(\frac{e-c}{d-b}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

فإن $BD = CE$ و $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CE}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

إذن $BD = CE$ و (BD) يعامد (CE).

تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 الأشكال والأعداد المركبة

في الشكل المجاور $ABCD$ مستطيل CBE و DCF مثلثين متقايسي الأضلاع و $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}$

و $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE}\right) = \left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DF}\right) = \frac{\pi}{3}$

نفرض أن $AD = 1$ و $AB = 3$

1) اختر معلما متعامدا ومتجانسا $(O,\vec{u},\vec{v})$ مباشر يطلب تحديده، ثم عين لواحق النقط A ، B ، C ، D ، E ، F في هذا المعلم.

2) باستعمال السؤال 1) بين أن المثلث AEF متقايس الأضلاع في الاتجاه المباشر.

✓ الحل

1) نختار المعلم $\left(A, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$

بما أن $\left\|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\| = 1$ و $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}$

فإن $\left(A, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ معلم متعامد ومتجانس مباشر.

لتكن Z_A ، Z_B ، Z_C ، Z_D ، Z_E ، Z_F لواحق A ، B ، C ، D ، E ، F على الترتيب.

$Z_A = 0$ ، $Z_B = 3$ ، $Z_C = 3+i$ ، $Z_D = i$

- بما أن المثلث ECB متقايس الأضلاع فإن $Z_B - Z_E = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(Z_C - Z_E\right)$

بالتبسيط نجد $Z_E = \frac{Z_B - e^{i\frac{\pi}{3}} Z_C}{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}} = \left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}i$

- بما أن DCF متقايس الأضلاع فإن $Z_C - Z_F = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(Z_D - Z_F\right)$

بالتبسيط نجد $Z_F = \frac{Z_C - e^{i\frac{\pi}{3}} Z_D}{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{3}{2} + \left(1 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$

2) لإثبات أن المثلث AEF متقايس الأضلاع في الاتجاه المباشر يكفي أن نبين أن :

$$(Z_F - Z_A) = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_E - Z_A)$$

$$Z_F - Z_A = \frac{3}{2} + \left(1 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i - 0 = \frac{3}{2} + \left(1 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

$$Z_E - Z_A = Z_E$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}} Z_E = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[\left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}i\right]$$

$$= \left(\frac{6+\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + i\left[\frac{1}{4} + \frac{6+\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{2} + \left(1 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

إذن AEF مثلث متقايس الأضلاع في الاتجاه المباشر.

تطبيق 2 إثبات التعامد والاستقامية

A ، B ، C ثلاث نقاط مختلفة فيما بينها لواحقها على التوالي a ، b ، c

1) ما هي الخاصية التي تحققها عمدة العدد $\frac{b-a}{c-a}$ لكي :

- النقط A ، B ، C على استقامة واحدة.
- المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان.

2) بين أن (CA) و (CB) متعامدان إذا علمت أن :
$a = -1 + 2\sqrt{3}i$ و $b = -1 - 2i\sqrt{3}$ و $c = 2 - i\sqrt{3}$.

الحل

1) لدينا $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)$

- النقط A ، B ، C على استقامة واحدة تعني أن :

$$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = 0 \quad \text{أو} \quad \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \pi$$

أي $arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = 0$ أو $arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \pi$

ومنه نستنتج أن $\frac{b-a}{c-a}$ حقيقي.

- المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان يعني :

$$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

أي $arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو $arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

وهذا يعني أيضا أن $\frac{b-a}{c-a}$ تخيلي صرف.

2)
$$\frac{b-a}{a-c} = \frac{-1-2\sqrt{3}i-2+i\sqrt{3}}{-1+2\sqrt{3}i-2+i\sqrt{3}} = \frac{-3-\sqrt{3}i}{-3+3\sqrt{3}i} \times \frac{-3-3\sqrt{3}i}{-3-3\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{9-9+9\sqrt{3}i+3\sqrt{3}i}{36} = \frac{12\sqrt{3}i}{36} = \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

بما أن $\frac{b-c}{a-c}$ تخيلي صرف فإن المستقيمين (CA) و (CB) متعامدان.

تطبيق 3 تعيين طبيعة مثلث

A و B نقطتان لاحقتاهما على التوالي $3 \times \left(1 + i\sqrt{3}\right)$ و $3 \times \left(1 - i\sqrt{3}\right)$

1) بين أن النقطتين A و B تنتميان إلى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 6.

2) عين لاحقة النقطة C بحيث النقطة O هي مركز ثقل المثلث ABC .

3) ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

الحل

1) لدينا $|Z_A| = 6$ و $|Z_B| = 6$ ومنه $|Z_A| = |Z_B| = 6$

وهذا يعني أن النقطتين A و B تنتميان إلى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 6 .

2) O مركز ثقل المثلث ABC يعني $Z_O = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$

ومنه $Z_C = -Z_A - Z_B = -6$

بما أن $|Z_C| = 6$ فإن C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 6 .

- بما أن مركز ثقل المثلث ABC منطبق على مركز الدائرة التي تشمل الرؤوس A ، B ، C فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع (المتوسط يصبح محورا).

تطبيق 4 المستقيمات الخاصة في مثلث

A ، B ، C ، D أربع نقط لواحقها على التوالي :
$a = 3 - 2i$ ، $b = 7i$ ، $c = 5 + 2i$ ، $d = -3 - 2i$

1) Ω نقطة لاحقتها $2i$.

بين أن النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 5 .

2) E منتصف $[AB]$ لاحقتها e.

أ) احسب e ثم بين أن $\frac{a-e}{d-e}=\frac{c-e}{a-e}$

ب) ما هي طبيعة المستقيم (EA) في المثلث DEC ؟

✔ الحل

1) لدينا $|b-2i|=|5i|=5$ و $|a-2i|=5$ و $|c-2i|=5$ و $|d-2i|=5$

ومنه النقط A ، B ، C ، D تقع على دائرة مركزها Ω ونصف قطرها 5 .

2) أ) لدينا $e=\frac{a+b}{2}=\frac{3+5i}{2}$

$$\frac{a-e}{d-e}=\frac{3-2i-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i}{-3-2i-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i}{-\frac{9}{2}-\frac{9}{2}i}=\frac{1-3i}{-3-3i}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$$

$$\frac{c-e}{a-e}=\frac{5+2i-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i}{3-2i-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i}=\frac{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i}=\frac{5-i}{3-9i}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$$

ومنه $\frac{a-e}{d-e}=\frac{c-e}{a-e}$

ب) لدينا $arg\left(\frac{a-e}{d-e}\right)=(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EA})$ و $arg\left(\frac{c-e}{a-e}\right)=(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC})$

ومنه ينتج $(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EA})=(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC})$

وهذا يعني أن (EA) منصف للزاوية $(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EC})$

وعليه المستقيم (EA) منصف للزاوية $(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EC})$ في المثلث DEC .

تطبيق 5 الكتابة المركبة والتحويل النقطي

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

M نقطة ذات اللاحقة $Z=1+2i$

عين Z' لاحقة النقطة M' صورة M بالتحويل المعطى في كل حالة من الحالات التالية :

أ) الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w}=\vec{u}-2\vec{v}$.

ب) التحاكي الذي مركزه النقطة O ونسبته 2 .

جـ) الدوران الذي مركزه $A(1,3)$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

د) التناظر المركزي الذي مركزه النقطة $B(1,-2)$.

هـ) التناظر المحوري الذي محوره (ox) .

✔ الحل

أ) $Z'=Z+1-2i=1+2i+1-2i=2$

ب) $Z'=2Z=2(1+2i)=2+4i$

جـ) $Z'-(1+3i)=e^{i\frac{\pi}{3}}(Z-1-3i)=e^{i\frac{\pi}{3}}(-i)$

$Z'=1+3i-\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(\frac{5}{2}\right)$

د) التناظر المركزي الذي مركزه B هو تحاكي مركزه B ونسبته -1

$Z'-(1-2i)=-(Z-1+2i)$

$Z'=1-2i-1-2i+1-2i=1-6i$

هـ) $Z'=\overline{Z}=\overline{(1+2i)}=1-2i$

تطبيق 6 التعرف على طبيعة تحويل نقطي

a و b لاحقتا النقطتين A و B على الترتيب مرتبطتان بالعلاقة المعطاة.

ما هو التحويل الذي يحول A إلى B في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $b=a+2-3i$ ، ب) $b=-2a$ ، جـ) $b-i=e^{i\frac{\pi}{4}}(a-i)$

د) $b=-\overline{a}$ ، هـ) $b+2+i=e^{i\frac{\pi}{6}}(a+2+i)$

✔ الحل

أ) التحويل الذي يحول A إلى B هو انسحاب شعاعه $\vec{w}(2,-3)$

ب) التحويل الذي يحول A إلى B هو تحاكي نسبته -2 ومركزه النقطة O

جـ) التحويل الذي يحول A إلى B هو دوران مركزه النقطة ذات اللاحقة i وزاويته $\frac{\pi}{4}$

د) التحويل الذي يحول A إلى B هو التناظر المحوري الذي محوره المستقيم (oy)

هـ) التحويل الذي يحول A إلى B هو دوران مركزه النقطة ذات اللاحقة $-2-i$ وزاويته $\frac{\pi}{6}$.

تطبيق 7 تعيين طبيعة تحويل وعناصره الأساسية

A ، B ، C ثلاث نقاط لواحقها على التوالي :

$a=6$ ، $b=-6+4i$ ، $c=-2-4i$

1- ا) تحقق أن $b-c=i(a-c)$

ب) استنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

2) نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' بحيث :

$Z'=e^{i\frac{\pi}{3}}Z$

ا) ما هي طبيعة هذا التحويل ؟

ب) احسب a' ، b' ، c' لواحق النقط A' ، B' ، C' صور A ، B ، C بهذا التحويل.

3) P ، Q ، R منتصفات القطع $[A'B]$ ، $[B'C]$ ، $[C'A]$ لواحقها هي :

p ، q ، r على الترتيب.

أ) احسب p ، q ، r

ب) تحقق أن $r-p=e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p)$ واستنتج أن المثلث PQR متقايس الأضلاع.

✓ الحل

1) ا) لدينا $b-c=(-6+4i)-(-2-4i)=-4+8i$

$i(a-c)=i(6+2+4i)=i(8+4i)=-4+8i$

ومنه $b-c=i(a-c)$ .... (*)

ب) من العلاقة (*) نستنتج أن B هي صورة A بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

إذن $CA=CB$ و $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{2}$

وبالتالي المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين.

2) ا) طبيعة التحويل هو دوران مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

ب) $a'=e^{i\frac{\pi}{3}}a=6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=3+3\sqrt{3}\,i$

$$b'=e^{i\frac{\pi}{3}}b=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-6+4i)=\left(-3-2\sqrt{3}\right)+i\left(2-3\sqrt{3}\right)$$

$$c'=e^{i\frac{\pi}{3}}c=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2-4i)=\left(-1+2\sqrt{3}\right)+i\left(-2-\sqrt{3}\right)$$

3) ا) $p=\frac{a'+b}{2}=\frac{3+3\sqrt{3}i+4i-6}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}+4}{2}i$

$$q=\frac{b'+c}{2}=\frac{(-3-2\sqrt{3})+i(2-3\sqrt{3})-2-4i}{2}=\frac{-5-2\sqrt{3}}{2}+\frac{i(-2-3\sqrt{3})}{2}$$

$$r=\frac{c'+a}{2}=\frac{(-1+2\sqrt{3})+i(-2-\sqrt{3})+6}{2}=\frac{5+2\sqrt{3}}{2}+i\frac{(-2-\sqrt{3})}{2}$$

ب) $r-p=\frac{8+2\sqrt{3}}{2}+i\frac{(-2-\sqrt{3}-3\sqrt{3}-4)}{2}=(4+\sqrt{3})+i(-3-2\sqrt{3})$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{-2-2\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(\frac{-2-3\sqrt{3}-3\sqrt{3}-4}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left[(-1-\sqrt{3})+i(-3-3\sqrt{3})\right]$$

$$=\left[\frac{-1-\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}(-3-3\sqrt{3})\right]+i\left[\frac{-3-3\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(-1-\sqrt{3})\right]$$

$$=\left[\frac{-1-\sqrt{3}+3\sqrt{3}+9}{2}\right]+i\left[\frac{-3-3\sqrt{3}-\sqrt{3}-3}{2}\right]$$

$$=\left[4+\sqrt{3}\right]+i\left[-3-2\sqrt{3}\right]$$

ومنه نستنتج أن $r-p=e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p)$ .... (**)

من المساواة (**) نستنتج أن R هي صورة Q بالدوران الذي مركزه P وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

إذن المثلث PQR متقايس الأضلاع.

تطبيق 8 صورة مربع بتحاكي

A ، B ، C و D أربع نقط لواحقها :

$a=3i$ ، $b=3+3i$ ، $c=3+6i$ ، $d=6i$ على الترتيب.

1) بين أن الرباعي $ABCD$ مربع.

2) بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته $-\frac{1}{2}$ عين لواحق النقط :

A' ، B' ، C' ، D' صور A ، B ، C ، D على التوالي بهذا التحويل.

3) تحقق أن الرباعي $A'B'C'D'$ مربع.

✓ الحل

1) بما أن $c-b=3i$ ، $a-b=-3$ فإن $c-b=-i(a-b)$

وبالتالي $\frac{c-b}{a-b}=-i$

إذن $\left|\frac{c-b}{a-b}\right|=1$ و $arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right)=-\frac{\pi}{2}$

وهذا يعني أن $BC=BA$ و $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})=-\frac{\pi}{2}$.

إذن المثلث ABC متقايس الساقين وقائم في B .... (1)

بما أن $d-a=6i-3i=3i$ فإن $c-b=d-a$

و هذا يعني أن $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ .... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن الرباعي $ABCD$ مربع.

2) لتكن a' ، b' ، c' ، d' لواحق A' ، B' ، C' ، D' على التوالي.

$c' = -\frac{1}{2}c = -\frac{3}{2} - 3i$ و $a' = -\frac{1}{2}a = -\frac{3}{2}i$

$d' = -\frac{1}{2}d = -3i$ و $b' = -\frac{1}{2}b = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$

3) بما أن $c' - b' = -i(a' - b')$ فإن $\frac{c' - b'}{a' - b'} = -i$

إذن $\left|\frac{c' - b'}{a' - b'}\right| = 1$ و $arg\left(\frac{c' - b'}{a' - b'}\right) = -\frac{\pi}{2}$ و $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'}$

وهذا يعني أن الرباعي $A'B'C'D'$ مربع.

تطبيق 9 الكتابة الأسية لعدد مركب. صور نقط بدوران

1) لتكن A نقطة لاحقتها $Z_A = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ و B لاحقتها $Z_B = -Z_A$

اكتب Z_A و Z_B على الشكل الأسي ، ثم علم النقطتين A و B.

2) C هي صورة B بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

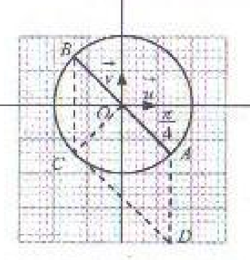
و D هي صورة C بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) علم النقطتين C و D ، ثم اكتب لاحقة C على الشكل الجبري.

ب) عبر عن Z_D لاحقة D بدلالة Z_C و Z_A ، ثم بين أن $Z_D = \sqrt{2} - i3\sqrt{2}$

3) ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

✓ الحل



1) لدينا $Z_A = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ و $Z_B = -Z_A$

الكتابة الأسية لـ Z_A و Z_B هي :

$Z_B = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$ و $Z_A = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$

بما أن $|Z_A| = |Z_B|$ فإن النقطتين A و B تنتميان إلى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2.

$(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ و $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

2) أ) $\begin{cases} OC = OB \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ و $\begin{cases} AC = AD \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

بما أن C هي نظيرة B بالنسبة إلى (ox) فإن $Z_C = \overline{Z_B} = -\overline{Z_A} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

ب) $Z_D - Z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_C - Z_A)$

$$Z_D = Z_A + e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_C - Z_A) = Z_A + iZ_C - iZ_A$$

$$Z_D = (1-i)Z_A + iZ_C = (1-i)(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) + i(-\sqrt{2} - i\sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{2} - \sqrt{2}) + i(-\sqrt{2} - \sqrt{2}) - i\sqrt{2} + \sqrt{2} = -3\sqrt{2}i + \sqrt{2}$$

3) لدينا $Z_D - Z_A = -2\sqrt{2}i$ و $Z_C - Z_B = -2\sqrt{2}i$

ومنه ينتج $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و $AD = BC$

ولدينا $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 3\frac{\pi}{4}$

إذن نستنتج مما سبق أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

تطبيق 10 صور نقط بتحاكي ودوران وتعيين طبيعة رباعي

A ، B ، C ثلاث نقط لواحقها على التوالي :

$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $b = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $c = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

1) عين d لاحقة D صورة C بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته -3.

2) عين e لاحقة E صورة C بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

3-أ) احسب $Z = \frac{d-b}{e-b}$

ب) I منتصف $[DE]$ و F نظيرة B بالنسبة إلى I ، بين أن $BDFE$ مربع.

✓ الحل

1) لدينا $Z_D - Z_A = -3(Z_C - Z_A)$

$$d = Z_D = -3Z_C + 4Z_A = -3\left(2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + 2\sqrt{2}$$

$$d = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i + 2\sqrt{2} = -\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$$

2) $e = Z_E = e^{-\frac{\pi}{2}i}Z_C = -iZ_C = -i(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

3) أ) $Z = \frac{d-b}{e-b} = \frac{-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i - \sqrt{2} - \sqrt{2}i}{-\sqrt{2} - i\sqrt{2} - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}$

$$= \frac{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i} = \frac{-1+i}{-1-i} = \frac{(-1+i)^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

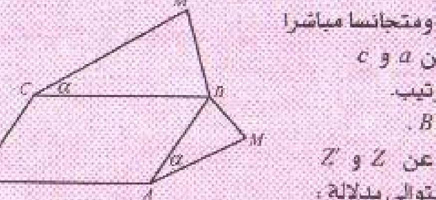
ومنه نستنتج أن $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}) = -\frac{\pi}{2}$ و $BE = BD$

ب) بما أن F نظيرة B بالنسبة إلى I و E نظيرة D بالنسبة إلى I فإن $BD = EF$ (التناظر تقايس) إذن $BDEF$ مربع.

تطبيق 11 — صورة نقطة بدوران

$OABC$ متوازي أضلاع مرتكز بحيث الرأس O يبقى ثابتا، M و M' نقطتان بحيث $AM = AB$ و $CM' = CB$ و $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM'}) = \alpha$

نريد أن نبرهن أن النقطة M' هي صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته α.



1) نختار معلما متعامدا ومتجانسا مباشرا مركزه النقطة O ولتكن a و c لاحقتا A و C على الترتيب.
- احسب لاحقة النقطة B.

2) بواسطة دورانات عبر عن Z و Z' لاحقتي M و M' على التوالي بدلالة a ، α و c ثم بين أن $Z' = e^{i\alpha} Z$ ماذا تستنتج ؟

الحل

1) لدينا $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ (علاقة شال)

$Z_B = Z_A + Z_C = a + c$

2) M صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\alpha$

ومنه $Z - a = e^{-i\alpha}(a + c - a) = e^{-i\alpha} c$ ومنه $Z = a + e^{-i\alpha} \times c$

M' صورة B بالدوران الذي مركزه النقطة C وزاويته α

ومنه $Z' - c = e^{i\alpha}(b - c) = e^{i\alpha}(a)$ ومنه $Z' = c + e^{i\alpha} \times a$

لدينا $Z' = e^{i\alpha} \times a + (Z - a)e^{i\alpha} = a \times e^{i\alpha} + Z e^{i\alpha} - a \times e^{i\alpha} = Z \times e^{i\alpha}$

من المساواة $Z' = e^{i\alpha} Z$ نستنتج أن M' صورة M بالدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته α.

تطبيق 12 — المحل الهندسي

في المستوي الموجه $ABCD$ مربع مباشر مركزه النقطة O ، النقطة M تتغير على القطعة $[BC]$ و N صورة M بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ، I منتصف $[MN]$.

نريد إيجاد المحل الهندسي للنقطة I لما M تمسح $[BC]$.

ليكن a طول نصف قطر المربع $ABCD$ ، نختار معلما متعامدا ومتجانسا مباشرا $(O, \vec{u}, \vec{v})$ بحيث $\overrightarrow{OC} = a\vec{u}$ و $\overrightarrow{OD} = a\vec{v}$

نضع $\overrightarrow{BM} = t\,\overrightarrow{BC}$ حيث t عدد حقيقي من $[0, 1]$.

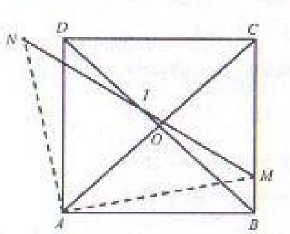
1- أ) عبر عن Z_M و Z_N لاحقتي M و N على الترتيب بدلالة a و t.

ب) تحقق أن النقط C ، D ، N على استقامة واحدة.

2- أ) احسب لاحقة النقطة I.

ب) استنتج المحل الهندسي للنقطة I.

الحل



1) أ) لدينا $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{OD} + t\,\overrightarrow{BC}$

ومنه $Z_M = -Z_D + t(Z_C - Z_B)$

$= -ai + t(a + ai)$

$= -ai + ta + tai = (ta) + i(-a + ta)$

لدينا $Z_N - Z_A = i(Z_M - Z_A)$

ومنه $Z_N = Z_A + i Z_M - i Z_A = (1 - i) Z_A + i Z_M$

$= (1 - i)(-a) + i(ta + i(-a + ta))$

$= -a + ia + ita - (-a + ta)$

$= -ta + i(a + ta)$

ب) $$\frac{Z_N - Z_D}{Z_C - Z_D} = \frac{-ta + i(a + ta) - ai}{a - ia} = \frac{-ta + ia + ita - ai}{a - ia}$$

$$= \frac{ta(-1 + i)}{-a(-1 + i)} = -t$$

ومنه النقط N ، D ، C تقع على استقامة واحدة.

2) أ) لدينا $Z_I = \frac{Z_M + Z_N}{2}$

$$Z_I = \frac{Z_M + Z_N}{2} = \frac{ta + i(-a + ta) - ta + i(a + ta)}{2} = ita$$

ب) بما أن $a \geq ta \geq 0$ فإن I تنتمي إلى القطعة $[OD]$

ومنه المحل الهندسي للنقطة I هي القطعة $[OD]$.

تطبيق 13 — الدوران والتحاكي - مجموعة النقط

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ،

B و M_1 نقطتان لاحقتاهما على الترتيب i و $Z_1 = (\frac{\sqrt{3} - 1}{2}) \times (1 - i)$

1) احسب طويلة وعمدة Z_1

2) M_2 نقطة لاحقتها Z_2 صورة M_1 بالدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أوجد طويلة وعمدة Z_2 ثم استنتج أن M_2 تنتمي إلى المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x$

3) M_3 نقطة لاحقتها Z_3 صورة M_2 بالتحاكي الذي مركزه النقطة O ونسبته $\sqrt{3}+2$

ا) تحقق أن $Z_3=\frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i)$

ب) بين أن النقطتين M_1 و M_3 تنتميان إلى الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها $\sqrt{2}$

4) نرفق بكل نقطة M مختلفة عن B ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث $Z'=\frac{1}{i-Z}$

عين ثم ارسم مجموعة النقط M بحيث النقطة M' تنتمي إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها 1 .

✓ الحل

1) $|Z_1|=\frac{\sqrt{3}-1}{2}|1-i|=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

$$arg(Z_1)=arg(\frac{\sqrt{3}-1}{2})+arg(1-i)=0-\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

إذن $Z_1=\left[\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\ ,\ \frac{-\pi}{4}\right]$

2) لدينا $Z_2=e^{i\frac{\pi}{2}}Z_1=iZ_1$

$$|Z_2|=|i|\ |Z_1|=|Z_1|=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

$$arg(Z_2)=arg(i)+arg(Z_1)=\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ،\ k\in\mathbb{Z}$$

إذن $Z_2=\left[\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]$

بما أن $arg(Z_2)=\frac{\pi}{4}$ فإن M_2 تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

3) ا) $Z_3=(\sqrt{3}+2)Z_2$

$$Z_3=(\sqrt{3}+2)iZ_1=(\sqrt{3}+2)i(\frac{\sqrt{3}-1}{2})(1-i)=(\sqrt{3}+2)(\frac{\sqrt{3}-1}{2})(1+i)$$

$$=(\frac{3-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2}{2})(1+i)=(\frac{1+\sqrt{3}}{2})(1+i)$$

ب) $|Z_1-i|=\left|(\frac{\sqrt{3}-1}{2})(1-i)\right|=\left|(\frac{\sqrt{3}-1}{2})-i(\frac{\sqrt{3}+1}{2})\right|$

$$=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}-1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}+1}{2})^2}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4}+\frac{4+2\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{2}$$

$$|Z_3-i|=\left|(\frac{1+\sqrt{3}}{2})+i(\frac{1+\sqrt{3}}{2})-i\right|$$

$$=\left|\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i\right|=\sqrt{(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}-1}{2})^2}$$

ومنه $|Z_3-i|=|Z_1-i|$ أي $BM_3=BM_1$

وهذا يعني أن M_1 و M_3 تنتميان إلى دائرة مركزها B ونصف قطرها $\sqrt{2}$

4) بما أن $OM'=1$ فإن $|Z'|=1$

لكن $|Z'|=\frac{1}{|Z-i|}$ ومنه $|Z-i|=1$

وهذا يعني أن النقطة M ذات اللاحقة Z تنتمي إلى دائرة مركزها B ونصف قطرها 1 .

تطبيق 14 متتالية الأعداد الحقيقية ومتتالية النقط

$(\vec{O},\vec{u},\vec{v})$ معلما للمستوي المركب ، نعتبر متتالية الأعداد الحقيقية (α_n) المعرفة بـ $\alpha_0=\frac{\pi}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا $\alpha_{n+1}=\alpha_n+\frac{5\pi}{6}$

من أجل كل عدد طبيعي n نسمي M_n نقطة من الدائرة (γ) ذات المركز O ونصف قطرها 1 بحيث الزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$ قيسها α_n .

1) علم النقط M_0 ، M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 .

2) نسمي Z_n لاحقة النقطة M_n ، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $Z_n=e^{i(\frac{\pi}{2}+5n\frac{\pi}{6})}$

3-ا) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ما يلي :

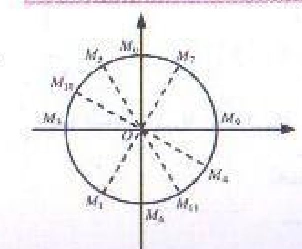
- النقطتان M_n و M_{n+6} متقابلتان قطريا.
- النقطتان M_n و M_{n+12} منطبقتان.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $Z_{n+4}=e^{-2i\frac{\pi}{3}}\times Z_n$

ثم استنتج أن المسافة M_nM_{n+4} تساوي $\sqrt{3}$.

وأن المثلث $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ متقايس الأضلاع.

✓ الحل



1) $M_0=\left[1\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ ، $M_1=\left[1\ ,\ \frac{4\pi}{3}\right]$ ، $M_2=\left[1\ ,\ \frac{\pi}{6}\right]$ ،

$M_3=[1\ ,\ \pi]$ ، $M_4=\left[1\ ,\ \frac{11\pi}{6}\right]$ $M_5=\left[1\ ,\ \frac{2\pi}{3}\right]$ ،

$M_6=\left[1\ ,\ \frac{3\pi}{2}\right]$ ، $M_7=\left[1\ ,\ \frac{\pi}{3}\right]$ $M_8=\left[1\ ,\ \frac{7\pi}{6}\right]$ ،

$M_{12}=\left[1\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ ، $M_{11}=\left[1\ ,\ \frac{5\pi}{3}\right]$ $M_{10}=\left[1\ ,\ \frac{5\pi}{6}\right]$ ، $M_9=[1\ ,\ 0]$

2) $Z_n=e^{i(\frac{\pi}{2}+5n\frac{\pi}{6})}$

- نبرهن بالتراجع على هذه الخاصية :

- من اجل $n=0$ فإن $Z_0=\left[1\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ اي $Z_0=e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5\times 0\pi}{6})}$

ومنه الخاصية محققة من اجل $n=0$

- نفرض أن الخاصية صحيحة من اجل n أي $Z_n=e^{i(\frac{\pi}{2}+5\frac{n\pi}{6})}$

ونبرهن ان الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ اي $Z_{n+1}=e^{i(\frac{\pi}{2}+5\frac{(n+1)\pi}{6})}$

$$Z_{n+1}=e^{i\alpha_{n+1}}=e^{i(\alpha_n+5\frac{\pi}{6})}=e^{i\alpha_n}\times e^{i5\frac{\pi}{6}}$$

$$=e^{i(\frac{\pi}{2}+5\frac{n\pi}{6})}\times e^{i5\frac{\pi}{6}}=e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+1)\pi}{6})}$$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

3) M_n و M_{n+6} متقابلتان قطريا هذا معناه ان :

$$Z_{n+6}=e^{i(\frac{\pi}{2}+5\frac{(n+6)\pi}{6})}\ ,\quad Z_{n+6}=-Z_n$$

$$Z_{n+6}=e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}\times e^{i5\pi}=-e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}$$ لأن $e^{i5\pi}=-1$

إذن M_n و M_{n+6} متقابلتين قطريا.

- النقطتان M_n و M_{n+12} منطبقتان إذا وفقط إذا كانت $Z_{n+12}=Z_n$

$$Z_{n+12}=e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+12)\pi}{6})}=e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}\times e^{i10\pi}=Z_n$$ لأن $e^{i10\pi}=1$

ب) $$Z_{n+4}=e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+4)\pi}{6})}=e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}\times e^{i\frac{10}{3}\pi}$$

$$Z_{n+4}=Z_n\times e^{i2(\frac{5\pi}{3})}=Z_n\times e^{-2i\frac{\pi}{3}}$$

نعلم أن $M_{n+4}M_n=|Z_{n+4}-Z_n|$

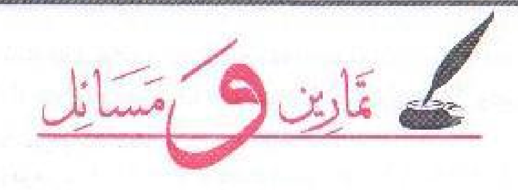
$$|Z_{n+4}-Z_n|=|Z_n|\left|e^{-2i\frac{\pi}{3}}-1\right|=\left|e^{-2i\frac{\pi}{3}}-1\right|=\sqrt{3}$$

إذن $M_{n+4}M_{n+8}=\sqrt{3}$ و $M_nM_{n+4}=\sqrt{3}$ يبقى لنا ان نبين ان $M_nM_{n+8}=\sqrt{3}$

$$M_{n+8}M_n=|Z_{n+8}-Z_n|=\left|e^{i(\frac{\pi}{2}+5(n+8)\frac{\pi}{6})}-e^{i(\frac{\pi}{2}+5n\frac{\pi}{6})}\right|$$

$$=\left|e^{i(\frac{\pi}{2}+5n\frac{\pi}{6})}\right|\left|e^{i\frac{20\pi}{3}}-1\right|=\sqrt{3}$$

ومنه المثلث $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ متقايس الأضلاع.



1

- A ، B ، C ثلاث نقاط لواحقها على الترتيب :

$Z_A=2+i$ ، $Z_B=5+2i$ ، $Z_C=-4-i$

1) علم النقط A ، B ، C في معلم متعامد ومتجانس.

2) احسب لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$.

ثم استنتج أن النقط A ، B ، C على استقامة واحدة.

2

- A ، B ، C ، A' ، B' ، C' نقط لواحقها على الترتيب :

$a=2-i$ ، $b=3+3i$ ، $c=4+i$ ، $a'=3i$ ، $b'=4-i$ ، $c'=5+i$

1) عين لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$

2) احسب لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC .

3) بين ان G مركز ثقل المثلث $A'B'C'$.

3

- A ، B ، C ثلاث نقط لواحقها على الترتيب $a=\frac{3}{4}i$ ، $b=1-\frac{5}{4}i$ ، $c=2+\frac{7}{4}i$

1) علم النقط A ، B ، C .

2) أ) أوجد العلاقة بين $Z_{\overrightarrow{AB}}$ و $Z_{\overrightarrow{AC}}$

ب) استنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

3) عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDC$ مربعا.

4

- A_1 ، B_1 ، C_1 ثلاث نقط لواحقها على الترتيب :

$a_1=4$ ، $b_1=2+i\sqrt{3}$ ، $c_1=-2+3\sqrt{3}i$

ننشئ المربعات المباشرة $OA_1A_2A_3$ ، $OB_1B_2B_3$ ، $OC_1C_2C_3$

1) بين أن النقط A_1 ، B_1 ، C_1 على استقامة واحدة.

2) بين ان النقط A_3 ، B_3 ، C_3 على استقامة واحدة.

3) أ) بين ان لاحقة النقطة C_2 هي $c_2=(1+i)c_1$:

ب) استنتج أن النقط A_2 ، B_2 ، C_2 على استقامة واحدة.

5 - المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

1-1) اعط كتابة جبرية للعدد المركب الذي طويلته 2 وعمدته $\frac{\pi}{2}$.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $iz-2=4i-z$.

2) نرمز بـ I ، A ، B للنقط ذات اللواحق $Z_I=1$ ، $Z_A=2i$ ، $Z_B=3+i$

أ) علم النقط A ، B ، I

ب) عين Z_C لاحقة النقطة C صورة A بالتناظر المركزي الذي مركزه I

جـ) اكتب على الشكل الجبري العدد $\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}$ ثم استنتج طويلته وعمدته.

د) D نقطة لاحقتها Z_D بحيث $Z_D-Z_C=Z_A-Z_B$ بين أن $ABCD$ مربع.

3) من أجل كل نقطة M من المستوي نعتبر الشعاع $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

أ) عبر عن هذا الشعاع بدلالة الشعاع $\overrightarrow{MI}$

ب) بين أن النقطة K التي تحقق $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KC}=2\overrightarrow{AB}$ هي منتصف $[AD]$.

جـ) عين (γ) مجموعة النقط M بحيث $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=\|2\overrightarrow{AB}\|$ ثم ارسمها.

6 - A ، B ، C ثلاث نقط لواحقها على الترتيب $a=3$ ، $b=5-4i$ ، $c=5+i$

1) اكتب العدد المركب $\frac{b-a}{c-a}$ على الشكل الجبري.

2) استنتج عبارة $Z_{\overrightarrow{AB}}$ بدلالة $Z_{\overrightarrow{AC}}$ ثم بين أن (AB) و (AC) متعامدان.

7 - a و b عددان حقيقيان غير معدومين و x عدد حقيقي، r و θ هما على التوالي طويلة وعمدة العدد المركب $a+ib$

1) بين أن $\cos x+b\sin x=r\cos(x-\theta)$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$

8 - A ، B ، C ، D أربع نقط لواحقها على الترتيب:

$a=1+2i$ ، $b=1-2i$ ، $c=2+3i$ ، $d=6-3i$

1) اكتب العددين المركبين $\frac{c-a}{d-a}$ و $\frac{c-b}{d-b}$ على الشكلين الجبري والمثلثي

2) استنتج من السؤال (1) طبيعة المثلثين ACD و BCD

3) بين أن النقط A، B، C، D تنتمي إلى نفس الدائرة والتي يطلب تعيين مركزها وطول نصف قطرها.

9 - نرفق بكل عدد مركب $Z\neq i$ العدد المركب Z' المعرف بـ $Z'=\frac{Z-1+2i}{Z-i}$

1) احسب Z' من أجل القيمتين 1 و $1-i$ للعدد Z

2) نضع $Z=x+iy$ و $Z'=x'+iy'$ حيث x ، y ، x' ، y' أعداد حقيقية

أ) اكتب x' و y' بدلالة x و y

ب) عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث Z' حقيقي.

جـ) عين (F) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث Z' تخيلي صرف

د) مثل المجموعتين (E) و (F) في المستوي المركب.

3) A و B نقطتان لاحقتاهما على التوالي $1-2i$ ، i ، باعتبار الشعاعين الذين لاحقتيهما على التوالي $Z-1+2i$ و $Z-i$ عبر عن عمدة Z' .

10 - 1) عين ثم ارسم في كل حالة من الحالات التالية مجموعة النقط M التي لاحقتها Z تحقق:

أ) $|Z-2|=|Z-(1-i)|$

ب) $|Z-1-i|=|Z+2-3i|$

جـ) $|Z-3-i|=\sqrt{3}$

د) $|Z+2+i|\leq 2$

2) عين ثم ارسم في كل حالة من الحالات التالية مجموعة النقط M التي لاحقتها Z تحقق:

أ) $\arg(Z+1)=\frac{\pi}{3}$ ، ب) $\arg(Z-i)=\frac{\pi}{2}$

جـ) $\arg(Z-1+i)=\pi$ ، د) $\arg(Z+i)=\frac{\pi}{3}$

11 - عين طبيعة التحويل الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' لاحقتها Z' في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $Z'=Z+2-i$ ، ب) $Z'=-\bar{Z}$

جـ) $Z'-2+i=Z-i+2$ ، د) $Z'-1=2e^{i\frac{\pi}{3}}(Z-1)$

هـ) $Z'=6Z$ ، و) $Z'=(\frac{\sqrt{3}+i}{2})Z$

12 - 1) t هو انسحاب يحول $A(2-i)$ إلى $B(4+2i)$

أ) ما هي لاحقة شعاع الانسحاب t ؟

ب) ما هي الكتابة المركبة لـ t ؟

2) h تحاكي مركزه النقطة O يحول $C(-2i)$ إلى $D(-5+3i)$

أ) ما هي نسبة التحاكي لـ h ؟

ب) ما هي الكتابة المركبة لـ h ؟

13 - A و B نقطتان حيث لاحقتيهما $Z_A=2-i$ ، $Z_B=1-3i$

1) عين لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالتناظر الذي مركزه A

2) عين لاحقة النقطة D صورة C بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

3) عين لاحقة النقط E صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CA}$

4) عين لواحق النقط A' ، C' ، D' ، E' صور النقط A ، C ، D ، E بالتحاكي الذي مركزه B ونسبته $\frac{1}{2}$ و ما هي طبيعة الرباعي $A'C'D'E'$ ؟

14 - A ، B ، C ثلاث نقط لواحقها على الترتيب $Z_A=2+i$ ، $Z_B=-1+2i$ ، $Z_C=1-2i$

1-أ) احسب $\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$ واعط شكله الجبري.

ب) استنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

2) عين لاحقة النقطة D بحيث $ABCD$ متوازي أضلاع.

3) لتكن E صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CA}$
عين لاحقة E ثم عين طبيعة الرباعي $ACDE$.

15 - A و B نقطتان حيث أن لاحقتيهما على التوالي $Z_A=1$ و $Z_B=2$ و θ عدد حقيقي من $]0,\pi[$ ولتكن M نقطة لاحقتها $Z=1+e^{2i\theta}$

1) ما هي (γ) مجموعة النقط M لما θ يمسح $]0,\pi[$ ؟

2) لتكن M' صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته -2θ
نرمز بـ Z' لاحقة M' ،
بين أن $Z'=\overline{Z}$ ثم بين أن M' تنتمي إلى الدائرة (C_1) التي مركزها النقطة A ونصف قطرها 1 .

3) في كل ما يلي نضع $\theta=\frac{\pi}{3}$ ونسمي r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{-2\theta}{3}$
بحيث $r(A)=A'$

أ) عين (C_2) صورة (C_1) بالدوران r ثم مثل A ، B ، C ، M ، (C_1) ، (C_2) و M'

ب) بين أن المثلث AMO متقايس الأضلاع.

جـ) بين أن (C_1) ، (C_2) تتقاطعان عند O و M'

د) لتكن النقطة P نظيرة M بالنسبة إلى A بين أن M' هي منتصف $[A'P]$

16 - في مستوي موجه ABC مثلث متقايس الساقين مباشر راسه A ، M منتصف $[BC]$
و O مسقطها العمودي على المستقيم (AC) ، I منتصف القطعة $[OM]$
الهدف من هذا التمرين هو الإثبات بواسطة الأعداد المركبة أن :
المستقيمين (IA) و (OB) متعامدان.
نضع $a=OA$ ، $c=OC$ ، $m=OM$

نختار المعلم المتعامد المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ بحيث $\overrightarrow{OA}=a\vec{u}$ ، $\overrightarrow{OM}=m\vec{v}$

1)أ) ما هي اللواحق Z_A ، Z_M ، Z_C ، Z_I للنقط A ، M ، C ، I على الترتيب ؟

ب) عين Z_B لاحقة النقطة B

2)أ) عبر عن $\theta=\frac{Z_A-Z_I}{Z_B}$ بدلالة a ، c ، m.

ب) بين أن الأعداد الحقيقية الموجبة a ، c ، m تحقق $ac=m^2$

جـ) استنتج أن θ تخيلي صرف.

د) ماذا تستنتج حول (IA) و (OB) ؟